Lección 1

Números complejos y funciones complejas elementales

1.1. Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución es un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser"*.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Es fácil entender lo que significa este teorema. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=1\pm i$$

tienen sentido cuando x es es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "*i*" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Estructura de la lección y objetivos

La lección está estructurada en tres partes:

- Álgebra y operaciones básicas con números complejos.

  Además de dar las definiciones básicas y explicar la terminología, a veces confusa, que se usa para hablar de números complejos, comprobaremos lo útiles que son las coordenadas polares para multiplicar números complejos. Aparece así la llamada *forma polar* de un número complejo y el importante concepto de *argumento principal.* Todavía no he encontrado ningún libro que explique el porqué de su definición. Un resultado muy útil es la *fórmula de De Moivre* que nos permitirá calcular las raíces de orden n de un número complejo. Las raíces complejas no se comportan igual que las reales y eso es algo que no suele venir explicado en los libros de texto. Al terminar esta lección serás capaz de ver dónde está el error en expresiones como:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

También veremos que el *módulo* de un número complejo relaciona la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ con el producto complejo y ello proporciona una herramienta muy útil para trabajar con la norma euclídea en el plano.

- Sucesiones de números complejos.

  Daremos las definiciones básicas de convergencia de una sucesión de números complejos y veremos que el estudio de una sucesión de números complejos es equivalente a estudiar dos sucesiones de números reales. Veremos cómo las sucesiones de números complejos permiten definir con facilidad los conjuntos fractales de Julia y de Mandelbrot.

- Funciones elementales complejas.

  Daremos las definiciones básicas de continuidad y derivabilidad de funciones complejas. Introduciremos la función exponencial compleja y comprobaremos que dicha función contiene a las funciones elementales en el sentido de que todas pueden definirse con facilidad a partir de ella. En particular, las funciones trigonométricas están relacionadas con la función exponencial; resultado que no cabe ni siquiera sospechar cuando se estudian dichas funciones en el contexto real.

La justificación de esta lección es clara: los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones trigonométricas por medio de las *fórmulas de Euler* y por ello en la teoría de series de Fourier se hace uso constante de ellos. Las transformadas de Fourier y de Laplace son funciones complejas.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección. En la primera aprenderás a usar los comando básicos de *Mathematica* para trabajar con números complejos. Precisamente, *Mathematica* trata por defecto todas las variables como si fueran números complejos. Comprenderás las respuestas llamativas que da *Mathematica* cuando escribes `(z^3)^(1/3)`, `Exp[Log[z]]` o `Log[Exp[z]]`. Así mismo aprenderás a usar algunos comandos específicos para representar gráficamente funciones complejas. La segunda práctica tratará de los conjuntos de Julia y de Mandelbrot y aprenderás a usar el método de Newton para polinomios complejos con el propósito de generar hermosos conjuntos fractales.

Para seguir con comodidad esta lección conviene que repases:

- Las funciones trigonométricas reales y sus "inversas": definición y propiedades básicas. En particular, la función arcotangente.
- El concepto de límite de una sucesión de números reales. El llamado "criterio del zapato" para la indeterminación 1^∞. La relación entre límite funcional y límite secuencial.

1.2. Operaciones básicas con números complejos

Definición 1.1. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman **números complejos**.

Comentarios a la definición

A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama unas veces *pares ordenados de números reales*, otras *vectores* o *puntos* y también *números complejos*. La razón de esto es que en $\mathbb{R}^2$ conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial, *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, *pares ordenados* cuando estamos pensando en $\mathbb{R}^2$ como conjunto sin ninguna estructura particular y *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo **concepto matemático** tiene sentido propio dentro de una determinada **estructura matemática**. Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (a,b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a,b). Para convencerte calcula $(1,-1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$
$$(a,0)(b,0)=(ab,0)$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a,0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos, más técnicos, $\mathbb{R}\times\{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(a,0)$ por el número real a. Es decir, hacemos la identificación $(a,0)=a$.

Fíjate que con dicha identificación el producto $a(c,d)$ tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real a por el vector (c,d) (estructura vectorial de $\mathbb{R}^2$) y producto del complejo $(a,0)$ por el complejo (c,d). Pero ambos coinciden y son iguales a (ac,ad).

El número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i. Con ello tenemos que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

Ahora podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

Se dice que a es la **parte real** y b es la **parte imaginaria** del número complejo $a+ib$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)=ac-bd+i(ad+bc)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z=x+iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y. Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z. Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Comentarios a la definición usual $i = \sqrt{-1}$

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$i^2 = -1 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error, procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ no puedes interpretar que -1 es el número real -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar -1 como el número complejo -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos.*

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa $\sqrt{z}$ para $z \in \mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que *la igualdad* $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, válida cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z, w \in \mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es *definir* $i = \sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i = \sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a + ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1 = -1$.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho (como te convencerás cuando estudies la teoría de funciones de variable compleja) pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que $\leqslant$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leqslant$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

1.2.1. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

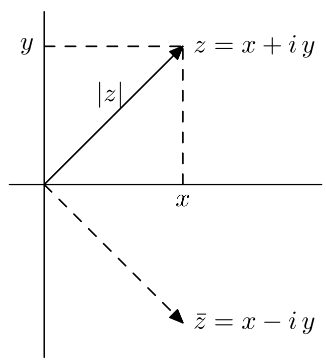

Figura 1.1: Representación de un número complejo

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.

Geométricamente $\overline{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x,y) (ver figura 1.1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z-w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z=a+ib$ y $w=c+id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.2) es $z+w$.

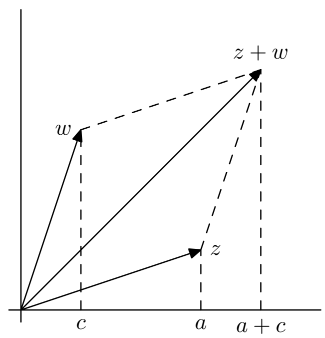

Figura 1.2: Suma de números complejos

Se comprueba fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que $\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ y $\overline{z}\,\overline{w}=\overline{zw}$.

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|,|\operatorname{Im} z|\}\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z| \tag{1.1}$$

La igualdad $|z|^2=z\overline{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para probar que para todos $z,w\in\mathbb{C}$ es

$$\textbf{a)}\quad |zw|=|z|\,|w| \qquad \text{y} \qquad \textbf{b)}\quad |z+w|\leqslant|z|+|w|$$

a) Basta observar que $|zw|$ y $|z|\,|w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2=zw\overline{zw}=zw\overline{z}\,\overline{w}=z\overline{z}w\overline{w}=|z|^2\,|w|^2=(|z|\,|w|)^2$$

b) Es suficiente probar que $|z+w|^2\leqslant(|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w=\\&=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})\leqslant|z|^2+|w|^2+2\,|\operatorname{Re}(z\overline{w})|\leqslant\\&\leqslant|z|^2+|w|^2+2\,|z\overline{w}|=|z|^2+|w|^2+2\,|z|\,|\overline{w}|=|z|^2+|w|^2+2\,|z|\,|\overline{w}|=\\&=(|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Deducimos también que se verifica la igualdad $|z+w| = |z| + |w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w} \in \mathbb{R}_o^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}_o^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_o^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

1.2.2. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

Como $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 1.3.

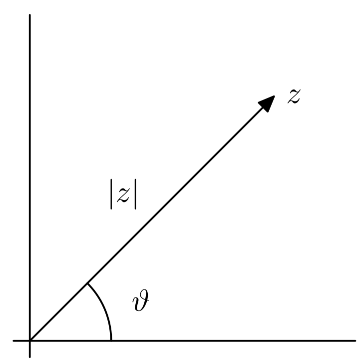

Figura 1.3: Forma polar de un número complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i\operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_o + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z) = t_o + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y viene dado por

$$\arg(z) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \quad \text{si } z \notin \mathbb{R}^-$$
$$\arg(z) = \pi \quad \text{si } z \in \mathbb{R}^-$$

A dicho argumento se le llama **argumento principal** de z.

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como $-\pi/2 < \operatorname{arctg} t < \pi/2$, se sigue que $-\pi < \arg(z) < \pi$ si $z \notin \mathbb{R}^-$. Luego, $-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$. Si $z = t \in \mathbb{R}^-$ es evidente que $z = |t|(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Y para $z \notin \mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2 \operatorname{Re} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{2 \operatorname{tg}(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{2 \operatorname{Im} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2 \operatorname{Im} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Donde se ha utilizado que $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene también dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leqslant 0, x = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}$$

Esta última forma es más cómoda para los cálculos.

Observaciones a la definición de argumento principal

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de 0 a $-\pi$.

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = x+iy$ con $x < 0, y < 0$ y supones que y es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante, $w = x+iv$ con $x < 0, v > 0$, y supones que v es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π. Además, la distancia $|w-z| = |v-y| = v-y$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π, digamos, $[\alpha, \alpha+2\pi[$ entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha+2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta $(x,y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho > 0)$. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a* $\mathbb{C}$ de algunas funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en $\mathbb{R}^+$ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ a perder la continuidad en $\mathbb{R}^+$.

Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$\begin{aligned} z &= |z|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta) \\ w &= |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z|\,|w|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|\,[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|\,(cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos*. Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Acabamos de ver que si z, w son complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(z + w)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*.Observa también que si $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$ entonces $-\varphi \in \operatorname{Arg}(1/z)$.

Proposición 1.2 (Fórmula de De Moivre)**.** *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta)$$

1.2.3. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi) = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i\operatorname{sen}\varphi_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, k y q dan el mismo resto al dividirlos por n. Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que está definida por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

Hemos obtenido que las raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Observa que definiendo $u = \cos(2\pi/n) + i\operatorname{sen}(2\pi/n)$, los números $u_0 = 1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ son las raíces n–ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces n–ésimas de z en la forma $z_k = z_0 u^k$. Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n–ésima principal, z_0, con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de zw. Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es **una** raíz n-ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal.

Por ejemplo, para $n = 2, z = w = -1$, como $\arg(-1) = \pi$, tenemos que

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i\operatorname{sen}(\pi/2) = i$$

En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,i = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

La igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ equivale a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir, $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$. Como $-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant 2\pi$ y $n \geqslant 2$ tiene que ser $k = 0$ (pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geqslant 4\pi$). Luego, debe ocurrir que $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ lo que equivale a que $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$.

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

1.2.4. Ejercicios

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + ib$.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{\overline{2+i}}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a) } f_1(z) = \overline{z}^2 \quad \text{b) } f_2(z) = z^3 \quad \text{c) } f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{d) } f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e) } f_4(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a) } |(1+i)(2-i)| \quad \text{b) } \left|\frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right| \quad \text{c) } \left|(1+i)^{20}\right| \quad \text{d) } \left|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)\right|$$

4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a) } -\sqrt{3}-i \quad \text{b) } -\sqrt{3}+i \quad \text{c) } \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d) } \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a+ib$:

$$\text{a) } (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad \text{c) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{d) } (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

7. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

8. Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

9. Sea $z = x+iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

10. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a,b,c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

11. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2+\sqrt{32}\,iz-6i = 0$$

12. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4+(1+i)z^2+5i = 0$.

13. Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

14. Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z\in\mathbb{C}$ de la cantidad $|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

15. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$ si $|z|<1$ y $|a|<1$ y también si $|z|>1$ y $|a|>1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

16. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)} \quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

17. Calcula una fórmula para la suma

$$\sum_{k=-N}^{N}\big(\cos(2k\pi t)+i\operatorname{sen}(2k\pi t)\big)$$

(tu respuesta debería de ser un cociente de senos).

18. Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ y $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Dado un número entero $m\in\mathbb{Z}$, calcúlese el valor de las expresiones:

a) $1+w^m+w^{2m}+\cdots+w^{(n-1)m}$;

b) $1-w^m+w^{2m}-\cdots+(-1)^{n-1}w^{(n-1)m}$.

19. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $\operatorname{sen}3\varphi=3\operatorname{sen}\varphi-4\operatorname{sen}^3\varphi$;

b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$;

c) $\operatorname{sen} 5\varphi = 5\operatorname{sen}\varphi - 20\operatorname{sen}^3\varphi + 16\operatorname{sen}^5\varphi$.

20. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$|z-3| \leqslant 3; \qquad 2 < |z-i| \leqslant 3; \qquad |\arg z| < \pi/6; \qquad |z-i| + |z+i| = 4$$
$$|z-1| = |z-2i|; \qquad \left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 2; \qquad \operatorname{Im}(z^2) > 6; \qquad |z-i| = \operatorname{Im} z + 1$$

21. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

22. Resuelve la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

23. Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

24. Si $0 \leqslant \arg w - \arg z < \pi$, prueba que el área del triángulo de vértices 0, z y w viene dada por $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{z}w)$.

1.3. Sucesiones de números complejos

Un poco de topología

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

se llama **disco abierto** de centro a y radio r. Observa que un disco abierto no puede ser vacío.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r \geqslant 0$, el conjunto

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\},$$

se llama **disco cerrado** de centro a y radio r. Observa que $\overline{D}(a,0) = \{a\}$.

Un conjunto se llama **acotado** si está contenido en algún disco centrado en el origen. Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es un conjunto **abierto** si todo punto de Ω es centro de algún disco abierto contenido en Ω. Por convenio el conjunto vacío se considera abierto. Un conjunto se llama **cerrado** si su complementario es abierto. Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un **dominio**. Una definición equivalente aunque menos intuitiva de dominio es la siguiente. Un dominio es un conjunto abierto no vacío, Ω, cuya única descomposición en la forma $\Omega = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos es la trivial, es decir, $\{A, B\} = \{\emptyset, \Omega\}$. Un conjunto cerrado y acotado se llama un conjunto **compacto**.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que un punto $z \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de A si todo disco abierto con centro en z contiene puntos de A distintos de z. Observa que un punto z puede ser un punto de acumulación de A y no pertenecer a A.

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. Como es usual, representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$. La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

Definición 1.3. La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número complejo z si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\{z_n\}$ converge a z si $|z_n - z| \to 0$.

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además en dicho caso*

$$\lim\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \lim\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \lim\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que para todo $K > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant n_0$ entonces $|z_n| \geqslant K$. En dicho caso diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es divergente o que **diverge** y escribiremos $\{z_n\} \to \infty$. Observa que $\{z_n\} \to \infty$ es lo mismo que $\{|z_n|\} \to +\infty$.

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

Proposición 1.5 (Álgebra de límites)**.**

- *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$*, entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$ *y* $\{z_n w_n\} \to zw$*. Además, si* $z_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \neq 0$*, entonces* $\{1/z_n\} \to 1/z$*.*
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está acotada entonces* $\{z_n + w_n\}$ *diverge.*
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está separada de* 0*, esto es, existe* $\rho > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de forma que para* $n \geqslant n_0$ *se cumple* $|w_n| \geqslant \rho$*, entonces* $\{z_n w_n\}$ *diverge.*

Recuerda que una **sucesión parcial** de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Teorema 1.6 (de Bolzano –Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.*

Definición 1.7. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que es de Cauchy si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant n_0$ entonces $\left|z_p - z_q\right| < \varepsilon$

Repitiendo el mismo argumento anterior, deducimos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy. Puesto que $\mathbb{R}$ es completo, ser de Cauchy equivale a ser convergente, luego si $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son de Cauchy convergen y, por tanto, $\{z_n\}$ es convergente.

Teorema 1.8 (de complitud)**.** *Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.*

1.3.1. Series de números complejos

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots, S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

La sucesión $\{S_n\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum\limits_{n \geqslant 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series.*

En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "convergente". Si una serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el límite de la serie que suele llamarse suma de la serie. Naturalmente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Como caso particular de la proposición 1.4, la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n\geqslant 1} z_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{n\geqslant 1} z_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Conviene que recuerdes la condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie. Si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^{n} z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

Proposición 1.9. *Condición necesaria para que* $\sum z_n$ *sea convergente es que* $\lim\{z_n\} = 0$.

Para las series es posible definir otro tipo de convergencia, la **convergencia absoluta**.

Definición 1.10. Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge absolutamente si la serie de números reales positivos $\sum_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

Proposición 1.11. *Si una serie de números complejos* $\sum z_n$ *es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

Demostración. Pongamos $S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $A_n = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ y supongamos que la sucesión $\{A_n\}$ es convergente, es decir, $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{A_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|A_q - A_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon \quad \text{para todos } p,q\in\mathbb{N} \text{ tales que } \quad q > p \geqslant n_0$$

Deducimos que para todos $p,q\in\mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_o$ se verifica que

$$\left|S_q - S_p\right| = \left|z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión $\{S_n\}$, es decir, la serie $\sum z_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. $\boxed{\checkmark}$

De hecho, el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que no demostraremos.

Teorema 1.12 (de Riemann)**.** *La serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ *converge absolutamente si, y sólo si, para toda biyección* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_{\pi(n)}$ *es convergente. Además, en tal caso se verifica que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$$

Criterios de convergencia no absoluta para series

Naturalmente, puedes usar los criterios de convergencia para series de números reales positivos, que ya debes conocer, para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los siguientes criterios de Dirichlet y Abel proporcionan información sobre la convergencia no absoluta.

Teorema 1.13. *. Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales y* $\{z_n\}$ *una sucesión de números complejos.*

Criterio de Dirichlet. *Si* $\{a_n\}$ *es monótona y converge a cero y la serie* $\sum z_n$ *tiene sumas parciales acotadas, entonces* $\sum a_n z_n$ *converge.*

Criterio de Abel. *Si* $\{a_n\}$ *es monótona y acotada y la serie* $\sum z_n$ *converge, entonces* $\sum a_n z_n$ *es convergente.*

1.3.2. Ejercicios

1. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$\text{i)}\quad z_n = \sqrt[n]{n} + i\,n\,a^n \quad (a\in\mathbb{R}, |a|<1) \qquad \text{ii)}\quad z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{i\,n}{2^n}$$

$$\text{iii)}\quad z_n = \sqrt[n]{a} + i\operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad (a>0) \qquad \text{iv)}\quad z_n = n\operatorname{sen}\frac{1}{n} + 5\,i\cos\frac{1}{n}$$

$$\text{v)}\quad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad \text{vi)}\quad z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y para todo $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n\in\operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\}\to\varphi$ y $\{|z_n|\}\to\rho$. Justifica que la sucesión $\{z_n\}\to\rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$.

3. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}+i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n|\,(\cos\varphi_n + i\operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

4. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ es bien conocido.

5. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

6. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{ii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\operatorname{sen} n}{n}$$

$$\text{iii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\operatorname{sen} n}{n^2} \qquad \text{iv)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$$

$$\text{v)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n} \qquad \text{vi)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\text{vii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right) \qquad \text{viii)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n + 7}$$

7. Sea $\rho\in\mathbb{R}$ con $|\rho|<1$ y $\vartheta\in\mathbb{R}$. Calcula los límites $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\vartheta)$.

1.4. Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$ cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A\subset\mathbb{C}$, a toda función compleja $f:A\to\mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u=\operatorname{Re} f$ "parte real de f" y la función $v=\operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x,y)=x+iy\in A$ por:

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy),\quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$$

Naturalmente, $f(z)=\operatorname{Re} f(z)+i\operatorname{Im} f(z)$.

La **función conjugada** de f es la función $\overline{f}$ dada por $\overline{f}(z)=\operatorname{Re} f(z)-i\operatorname{Im} f(z)$. La **función módulo** de f es la función $|f|$ dada por $|f|(z)=|f(z)|$.

1.4.1. Continuidad y límite funcional

Definición 1.14. Se dice que la función $f:A\to\mathbb{C}$ es continua en un punto $a\in A$ si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z\in A\\ |z-a|<\delta\end{array}\right\}\Longrightarrow |f(z)-f(a)|<\varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|,|\operatorname{Im} z|\}\leqslant |z|\leqslant |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en a.

Definición 1.15. Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f:A\to\mathbb{C}$ tiene límite en a si hay un número complejo $L\in\mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z\in A\\ 0<|z-a|<\delta\end{array}\right\}\Longrightarrow |f(z)-L|<\varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to a} f(z)=L$.

Usando las desigualdades anteriores y llamando $a=\alpha+i\beta$, $L=\lambda+i\mu$ tenemos

$$\lim_{z\to a} f(z)=L \iff \begin{cases}\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y)=\lambda\\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y)=\mu\end{cases}$$

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en infinito si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = L$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en infinito si para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en un punto a de acumulación de A si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - \alpha| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Observa que hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

El siguiente resultado, aunque elemental, es importante.

Proposición 1.16 (Continuidad del argumento principal)**.** *La función argumento principal es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$ y es discontinua en $\mathbb{R}^-$.*

Demostración. Sabemos que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$ el argumento principal viene dado por

$$\arg z = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}$$

Teniendo en cuenta que la función arcotangente es continua y que $\operatorname{Re} z + |z| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$, deducimos que el argumento principal es continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$.

Sea $a \in \mathbb{R}^-$ y $z_n = a + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Claramente $\{z_n\} \to a$, pero como

$$\arg(z_{2n}) = \operatorname{arctg}(1/na) + \pi \to \pi \qquad \arg(z_{2n-1}) = \operatorname{arctg}(-1/na) - \pi \to -\pi$$

concluimos que $\{\arg(z_n)\}$ no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en a.

1.4.2. Derivada de una función de variable compleja

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$, se dice que f es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ si existe el límite

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}.$$

El valor de dicho límite se representa por $f'(a)$ y se llama derivada de f en el punto a.

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más fuerte que la derivabilidad para funciones reales.

Casos Particulares

- Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real
- Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.

  Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces la función f es de la forma

  $$f(t) = u(t) + iv(t)$$

  donde u y v son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:

  $$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i\frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$

  y deducimos que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones u y v son derivables en a, en cuyo caso

  $$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

Proposición 1.17 (Reglas de derivación)**.** *Sean dos funciones $f, g : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:*

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- *Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$ entonces*

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$$

- ***Regla de la cadena.*** *Sean $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subseteq B$, y consideremos la función compuesta $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$. Supongamos que f es derivable en $a \in A \cap A'$ y g es derivable en $b = f(a) \in B \cap B'$. entonces h es derivable en a y*

$$h'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a) = g'(b) f'(a)$$

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

1.4.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

Teorema 1.18 (Relación ente la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, a un punto de Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función de Ω en $\mathbb{C}$. Notemos $a = \alpha + i\beta$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) *f es derivable (en sentido complejo) en $a = \alpha + i\beta$.*

ii) *Las funciones $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ son diferenciables en (α,β) y además*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) \end{aligned}\right\} \textit{Ecuaciones de Cauchy–Riemann}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

Demostración. Por definición, f es derivable si, y sólo si existe un número complejo, la derivada de f en a, $f'(a) = \lambda + i\mu$ que verifica

$$\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z-a)|}{|z-a|} = 0.$$

Pongamos $z = x + iy$. Si tenemos en cuenta la igualdad

$$(\lambda + i\mu)(x + iy - \alpha - i\beta) = \lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta) + i[\mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)]$$

y el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea (visto en $\mathbb{R}^2$), el límite anterior se escribe como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - (\lambda(x-\alpha)-\mu(y-\beta),\mu(x-\alpha)+\lambda(y-\beta))\|}{\|(x,y)-(\alpha,\beta)\|} = 0$$

o bien, como $(\lambda(x-\alpha)-\mu(y-\beta),\mu(x-\alpha)+\lambda(y-\beta)) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}$,

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\left\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right\|}{\|(x,y)-(\alpha,\beta)\|} = 0.$$

La condición anterior quiere decir que la aplicación $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ de $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en (α,β) y su diferencial es la aplicación lineal dada por $(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Por tanto $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y)\mapsto (u(x,y),v(x,y))$ en (α,β), esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta)=\lambda,\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta)=-\mu,\ \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)=\mu,\ \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta)=\lambda$$

Finalmente

$$f'(a)=f'(\alpha+i\beta)\lambda+i\mu=\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

$\boxed{\checkmark}$

Este resultado explica porqué si defines, sin pensarlo mucho, una función compleja en la forma $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones u y v, la función así definida no sea derivable. Pues las funciones u y v no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son "auténticas funciones complejas" en el sentido de que si la función $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ es derivable entonces la expresión $u(x,y)+iv(x,y)$ debe depender únicamente de la variable z. Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Ejemplos 1.19.

- $f(x+iy)=x$ no es derivable en ningún punto.
- $f(z)=z|z|^2$ sólo es derivable en cero.
- $f(x+iy)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z)=f(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

1.4.4. Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Definición 1.20. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es **holomorfa** en Ω si f es derivable en todo punto de Ω. En tal caso la función definida para $z\in\Omega$ por $z\mapsto f'(z)$ se llama **función derivada** de f. Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman **funciones enteras**.

Ejemplos 1.21.

- Las funciones polinómicas, es decir, las funciones de la forma
$$p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$
donde $c_k\in\mathbb{C}$ para $0\leqslant k\leqslant n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por
$$p'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots+nc_nz^{n-1}\qquad (z\in\mathbb{C})$$
- Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma $R(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:q(z)\neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por
$$R'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q(z)^2}\qquad (z\in\Omega)$$

Propiedades de las funciones holomorfas

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.22. *El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.*

Proposición 1.23. *Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Fijado $z_0\in\Omega$, definimos
$$A=\{z\in\Omega: f(z)=f(z_0)\}$$
A es no vacío y, por ser f continua, es un cerrado relativo de Ω. Veamos que también es abierto. Sea $a\in A$ y como Ω es abierto, existe $r>0$ tal que $D(a,r)\subset\Omega$. Tomamos $b\in D(a,r)$

y definimos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ por $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. Como f es derivable, la regla de la cadena nos dice que φ es derivable y

$$\varphi'(t) = f'((1-t)a + tb)(b-a) = 0$$

Por ser φ una función compleja de variable real tenemos

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re}\varphi)'(t) + i(\operatorname{Im}\varphi)' = 0 \qquad (t \in [0,1])$$

Luego $(\operatorname{Re}\varphi)'(t) = 0$ y $(\operatorname{Im}\varphi)'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Puesto que $\operatorname{Re}\varphi$ y $\operatorname{Im}\varphi$ son funciones reales de variable real definidas en $[0,1]$, se sigue que son constantes. Luego φ es constante y por tanto $\varphi(0) = f(a) = \varphi(1) = f(b)$ luego $b \in A$. Hemos probado que $D(a,r) \subset A$, luego A es abierto. El hecho de que Ω sea un dominio permite concluir que $A = \Omega$, es decir, f es constante en Ω. $\boxed{\checkmark}$

Corolario 1.24. *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.*

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

Proposición 1.25. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(I) $\operatorname{Re} f$ *es constante en* Ω

(II) $\operatorname{Im} f$ *es constante en* Ω

(III) *La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en* Ω

(IV) f *es constante en* Ω

(V) $|f|$ *es constante en* Ω

Demostración. Pongamos $f = u + iv$, con $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Es claro que la condición (iv) implica todas las demás.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Las ecuaciones de Cauchy–Riemann afirman que

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad (z = x+iy \in \Omega)$$

Puesto que $\operatorname{Re} f$ es constante tenemos $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ lo que implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ de donde deducimos (iv) gracias a la proposición anterior.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Puesto que $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re}(if)$ la implicación $(i) \Rightarrow (iv)$ ya probada nos dice que la función if es constante y, por lo tanto, f también lo es.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Como f es holomorfa y $\overline{f}$ lo es por hipótesis tenemos que $f + \overline{f} = 2\operatorname{Re} f$ es holomorfa. Puesto que $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$ es constante, deducimos, por $(ii) \Rightarrow (iv)$, que $\operatorname{Re} f$ es constante y por $(i) \Rightarrow (iv)$ concluimos que f es constante.

$(v) \Rightarrow (iv)$ Si $|f| = \alpha$ entonces $f(z)\overline{f}(z) = \alpha^2$. Si $\alpha = 0$ entonces f es idénticamente nula y hemos acabado. Si $\alpha \neq 0$ entonces f no se anula en ningún punto por lo que $\overline{f}(z) = \dfrac{\alpha^2}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, por $(iii) \Rightarrow (iv)$, concluimos que f es constante. $\boxed{\checkmark}$

Observa que estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo (norma euclídea) es constante.

1.4.5. Ejercicios

1. Consideremos la función dada para $z \neq 0$ por $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$, y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos verifica f las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es f derivable en $z = 0$?.

2. Sea Ω un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sean $\Omega^* = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por: $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad \forall z \in \Omega^*$. Prueba que f^* es holomorfa en Ω^*.

3. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que hay números $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c$ para todo $z \in \Omega$. Prueba que f es constante en Ω.

4. Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0) = 0$, entonces dicha función es única.

5. Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a, b, c para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, verificando que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

1.5. Funciones complejas elementales

1.5.1. La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z\in\mathbb{C}$. Llamemos $z = x+iy$. Consideraremos que $y\neq 0$, puesto que si $y=0$ tendríamos que $z=x$ sería un número real. Pongamos $w_n = 1+z/n$ y

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}$$

Sea n_o tal que para $n\geqslant n_o$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n)>0$. Entonces, para $n\geqslant n_o$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por

$$|w_n|^2 = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}(\cos(n\varphi_n)+i\operatorname{sen}(n\varphi_n))$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim|w_n|^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{e}^x$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\{n\frac{y/n}{1+x/n}\} = y$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n\left(\cos(n\varphi_n)+i\operatorname{sen}(n\varphi_n)\right) = \mathrm{e}^x(\cos y+i\operatorname{sen}y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$\mathrm{e}^z = \exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}z}\left(\cos(\operatorname{Im}z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}z)\right)$$

Observa que

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}z},\quad \operatorname{Im}z\in\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^z)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas.

De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce que la función exponencial es una función entera y $\exp'(z) = \exp(z)$. Se prueba fácilmente que $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{w}$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} > 0$.

1.5.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $\mathrm{e}^{w} = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$\mathrm{e}^{w} = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $\mathrm{e}^{w} = z$ es necesario y suficiente que:

1. $|\mathrm{e}^{w}| = |z|$, esto es, $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
2. $\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{w}) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(w) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w\in\mathbb{C} : \mathrm{e}^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k\in\mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $\mathrm{e}^w = z$. Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad \text{para todo } z\in\mathbb{C}^*$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k. Es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(-1+i\sqrt{3}) = \log|-1+i\sqrt{3}| + i\arg(-1+i\sqrt{3}) = \log 2 + i(\arctan(-\sqrt{3})+\pi) = \log 2 + i\frac{2\pi}{3}$$

$$\log(-\sqrt{3}+i) = \log|-\sqrt{3}+i| + i\arg(-\sqrt{3}+i) = \log 2 + i(\arctan(-1/\sqrt{3})+\pi) = \log 2 + i\frac{5\pi}{6}$$

$$\log((-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)) = \log(-4i) = \log 4 - i\frac{\pi}{2} \neq \log(-1+i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3}+i) = \log 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

Lo que está claro es que el número $\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log z + \log w$ es **un** logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo **principal** de zw.

Como la función $z \to \arg z$ es continua en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y discontinua en $\mathbb{R}_o^-$, se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en $\mathbb{R}_o^-$ y continuo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$. De hecho, el logaritmo principal es una función holomorfa en el dominio $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$. Esto puedes probarlo usando las condiciones de Cauchy-Riemann aunque en este caso es más fácil proceder como sigue. Sea $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y $b = \log a$. La función

$$h(w) = \frac{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^b}{w-b}, \quad h(b) = \mathrm{e}^b$$

es continua en todo $\mathbb{C}$. Además $h(b)\neq 0$ y, por tanto, hay algún $r>0$ tal que $h(w)\neq 0$ para todo $w\in D(b,r)$. Como la función logaritmo principal es continua en a, deducimos que hay un $s>0$ tal que $w = \log z\in D(b,r)$ siempre que $z\in D(a,s)$. Teniendo en cuenta que la función logaritmo principal es inyectiva, podemos escribir para $z\in D(a,s)$:

$$\frac{\log z - \log a}{z-a} = \frac{1}{h(\log z)} \Longrightarrow \lim_{z\to a}\frac{\log z - \log a}{z-a} = \frac{1}{h(\log a)} = \frac{1}{a}$$

Hemos probado, pues, que $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$.

1.5.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b=e^{b\log a}$. Ahora, dados $a,b\in\mathbb{C}$, con $a\neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a+i2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a+i2k\pi)}$ donde $k\in\mathbb{Z}$, es **una** potencia de base a y exponente b. De todas ellas se destaca una:

$$a^b=\mathrm{e}^{b\log a}$$

y dicho número se llama **valor principal** de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b=1/n$ donde $n\in\mathbb{N}$, el número

$$a^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log a\right)=\exp\left(\frac{\log a}{n}+i\frac{\arg a}{n}\right)=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, $z\longmapsto a^z$, definidas por $a^z=\exp(z\log a)$ que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente b, $z\longmapsto z^b$, definida por $z^b=\exp(b\log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w}=a^z+a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b=z^bw^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b\log(zw))=\exp(b\log z+b\log w)$$

equivalentemente, puesto que la función $\exp$ es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

$$b\log(zw)=b\log z+b\log w+2k\pi i,\qquad \text{para algún } k\in\mathbb{Z}$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante la igualdad $\log(zw)=\log z+\log w$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k=0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c=z^{bc}$ no es cierta en general.

1.5.4. Funciones trigonométricas complejas

Seno y coseno complejos

Las ecuaciones de Euler:

$$\cos t=\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2},\qquad \operatorname{sen} t=\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}$$

válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Puesto que el coseno y el seno complejos está definidos como combinación de exponenciales sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

1. Identidad fundamental $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
2. $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$
3. Fórmulas de adición
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z+w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w + \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z \end{aligned}$$
4. Las funciones seno y coseno son derivables en todo $\mathbb{C}$ con $\operatorname{sen}' z = \cos z$, $\cos' z = -\operatorname{sen} z$
5. Relación con las funciones hiperbólicas. Recordando que las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ se definen por:
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
Es de comprobación inmediata que:
$$\cosh x = \cos(ix) \qquad \operatorname{senh}(x) = -i \operatorname{sen}(ix)$$
6. Se cumplen las igualdades
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 \\ |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 \end{aligned}$$
7. Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas, aunque si lo están en bandas acotadas paralelas al eje real.
8. Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen} z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $2k\pi$ y $\cos z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad (\cos z \neq 0)$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\}$. Además sabemos que $\cos z = 0$ sólo si z es real de la forma $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}$$

1.5.5. Funciones trigonométricas inversas

Arcocoseno complejo

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se trata de calcular los complejos w tales que $\cos w = z$.

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z \iff e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

puesto que $\exp(w) \neq 0$ para cualquier w, podemos multiplicar por e^{iw} la expresión anterior

$$e^{2iw} - 2z e^{iw} + 1 = 0$$

Poniendo $u = e^{iw}$, la ecuación anterior podemos escribirla $u^2 - 2zu + 1 = 0$, cuyas raíces son

$$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw) = z \pm i\sqrt{1 - z^2} \iff iw \in \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1 - z^2}) \iff \cos w = z$$

Naturalmente, hay infinitos valores de w que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por $\operatorname{Arccos} z$.

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1 - z^2})$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal de $\operatorname{Arccos} z$ que está definido por:

$$\arccos z = \frac{1}{i}\log(z + i\sqrt{1-z^2})$$

Veamos que el $\arccos z$ extiende al arcocoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1,1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\log(x+i\sqrt{1-x^2}) &= \frac{1}{i}\left(\log\left|x+i\sqrt{1-x^2}\right| + i\arg(x+i\sqrt{1-x^2})\right) = \\
&= \frac{1}{i}\left(\log 1 + i\arg(x+i\sqrt{1-x^2})\right) = \\
&= \arg(x+i\sqrt{1-x^2})
\end{aligned}$$

Observemos que $(x, \sqrt{1-x^2})$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x + i\sqrt{1-x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x. Además, para $x \in [-1,1]$ se tiene que $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Deducimos que $\arg(x+i\sqrt{1-x^2}) = \arccos x$.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$, y que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, deducimos, por la regla de la cadena, que la función $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ es holomorfa en el conjunto

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 - z^2 \notin \mathbb{R}_o^-\right\} = \mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$$

Análogamente $\log(z+i\sqrt{1-z^2})$ es derivable en el conjunto

$$\Omega_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : z + i\sqrt{1-z^2} \notin \mathbb{R}_o^-\right\}$$

Como $z + i\sqrt{1-z^2}$ y $z - i\sqrt{1-z^2}$ son inversos, tenemos que

$$z + i\sqrt{1-z^2} \in \mathbb{R}_o^- \Rightarrow z - i\sqrt{1-z^2} \in \mathbb{R}_o^- \Rightarrow \left.\begin{cases} z \in \mathbb{R}^- \\ \sqrt{1-z^2} \in i\mathbb{R} \end{cases}\right\} \Rightarrow z \in]-\infty,-1]$$

deducimos que $\Omega_1 = \mathbb{C}\setminus]-\infty,-1] \supset \Omega$. Luego el arcocoseno es holomorfo en Ω. La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\begin{aligned}
\arccos' z &= \frac{1}{i}\,\frac{1 + i\dfrac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{\sqrt{1-z^2} - iz}{iz - \sqrt{1-z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}
\end{aligned}$$

Arcoseno complejo

Dado un número complejo z queremos calcular los complejos w tales que $\operatorname{sen} w = z$. El conjunto de tales números lo representaremos por Arcsen. Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que

$$\operatorname{sen} w = \cos\big(\frac{\pi}{2} - w\big)$$

luego $\operatorname{sen} w = z$ si, y sólo si, $\frac{\pi}{2} - w \in \frac{1}{i}\operatorname{Log}\big(z \pm i\sqrt{1-z^2}\big)$. Equivalentemente si

$$w \in \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Log}\big(z \pm i\sqrt{1-z^2}\big)$$

El valor principal del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arc\,sen} z$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\operatorname{arc\,sen} z = \frac{\pi}{2} + i\log\big(z + i\sqrt{1-z^2}\big) \qquad z \in \mathbb{C}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Arcotangente compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos calcular los números complejos w tales que $z = \operatorname{tg} w$, esto es, $z = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w}$ o, lo que es lo mismo, $z\cos w = \operatorname{sen} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$. Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z\,\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Si $z = \pm i$ la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos $z \neq \pm i$. Multiplicando por $e^{iw} = u$ la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2+1) \Rightarrow u^2(1-iz) = 1 + iz$$

puesto que $z \neq -i$ podemos escribir $u^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$, esto es,

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \Longleftrightarrow w \in \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Definimos entonces el valor principal de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Puedes probar ahora que la función $\operatorname{arc\,tg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1\}$

Es fácil probar que la función arcotangente compleja, al igual que ocurre con las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.

1.5.6. Ejercicios

1. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

2. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números

$$1+\mathrm{e}^{i\varphi},\ 1-\mathrm{e}^{i\varphi},\ -a\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

donde $|\varphi| \leqslant \pi$ y $a > 0$.

3. Calcula $\log z$ y $\mathrm{Log}\, z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ \mathrm{e}^{-3},\ \mathrm{e}^{5i},\ 4,\ -5\,\mathrm{e},\ 1+i$$

4. Calcula $\log(3i)+\log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1+i\sqrt{3})\big)$.

5. Calcula $\log(-1-i)-\log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

6. Calcula

$$[(-4)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i,\ (1+i)^{1+i}$$

7. a) Estudia, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a)}\ \log(\exp(z))=z;\ b)\ \exp(\log(z))=z;\ c)\ \log\left(\frac{1}{z}\right)=-\log(z);$$

$$d)\ \log(\sqrt[n]{z})=\frac{\log(z)}{n};\ e)\ \log(z^n)=n\log(z).$$

b) Prueba que la función logaritmo establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^* : -\pi<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$.

8. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\mathrm{Arg}(zw)=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w) \qquad \mathrm{Log}(zw)=\mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(w)$$

9. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a)}\ \mathrm{Log}[a^b]=b\,\mathrm{Log}(a) \quad \text{b)}\ \log[a^b]=b\,\mathrm{Log}(a) \quad \text{c)}\ \log(a^b)=b\log a$$

10. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2=z^2$; por tanto $2\,\mathrm{Log}(-z)=2\,\mathrm{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\mathrm{Log}(-z)=\mathrm{Log}(z)$.

11. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i=(-1)^{1/2}=[(-1)^3]^{1/2}=(-1)^{3/2}=i^3=-i$$

12. Calcula las partes real e imaginaria de los números

$$\operatorname{sen}(1+i), \quad \cos(1-i), \quad \operatorname{tg}(1+2i)$$

13. Indica los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{arc\,sen} z$, $\operatorname{arc\,tg} z$ toman:

a) Valores reales.

b) Valores imaginarios puros.

14. Calcula $\operatorname{Arcsen}(1+i)$, $\operatorname{Arctg}(1-i)$, $\operatorname{arc\,sen} i$, $\operatorname{arc\,tg} 2i$.

15. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos tal que $\{|z_n|\} \to +\infty$. Justifica que

$$\left\{\left(1+\frac{a}{z_n}\right)^{z_n}\right\} \to \exp(a)\,; \quad \left\{z_n\left(a^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\right\} \to \log(a) \quad (a \neq 0)$$